بدفهمی‌های دانش‌آموزان
از مباحث مثلثات

مجتبی علامه، کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی شِروان
زهرا گویا، دانشگاه شهید بهشتی

مقدمه

در ایران، موضوع مثلثات، به لحاظ تاریخی و فرهنگی، همیشه مورد توجه برنامه‌ریزان درسی بوده است. علاوه بر این، مثلثات یکی از اساسی‌ترین مفاهیم ریاضی است که در علوم دیگر کاربرد فراوانی دارد و مانند هر علم دیگری، در ابتدای آموزش آن، لازم اســت دانش‌آموزان با مفاهیم، اصول، واژه‌ها و تعریف‌ها آشنا شوند. همان‌طور که گلیمن (۱۹۹۱) تأکید نموده اســت، مثلثات بخش جدانشــدنی ریاضی دبیرســتان اســت، این در حالی اســت که بعضی تحقیقات نشــان می‌دهند که مثلثات، یکــی از مباحثی اســت که دانش‌آموزان کمتر آن را دوست دارند و در آن موفق‌انــد؛ حتی گاهی از آن بیزارنــد. برای آن‌ها، مثلثات در مقایســه با مباحث دیگر ریاضیِ مدرسه‌ای، دشوارتر و انتزاعی‌تر است (هولیا گور[۱]، ۲۰۰۹). تجربه‌های بسیاری از معلمان ریاضی نیز حاکی از این است که دانش‌آموزان در فهم و درک مفاهیم پایه‌ای و توابع مثلثاتی، با چالش‌های جدی مواجه‌اند.

وجود اشتباهات مفهومی و بدفهمی‌ها، دانش‌آموزان را در مواجه شــدن با مســئله‌هایی مثلثاتی دچار اشکال می‌کند و باعث می‌شود تا حتی برای حل برخی از مسائل معمولــی ریاضی که، دانــش مورد نیاز را هــم برای حل آن‌ها در اختیار دارند، باز به نتیجه نرســند و تلاش آن‌ها با شکست مواجه گردد. مثلاً بارها شاهد بوده‌ایم که تعداد قابل توجهی از دانش‌آموزان در پاسخ به این سؤال که اگر، $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$، آنگاه $\sin 60^\circ$ چقدر می‌شــود، گفته‌اند که:

$$\sin 60^\circ = \sin(30+30)^\circ = \sin 30^\circ + \sin 30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

و یا اینکه، یکی از پاسـخ‌های متـداول دانش‌آموزان دربارهٔ مفهوم درجه این اســت که: «اگــر محیط دایره را به ۳۶۰ قســمت مســاوی تقســیم کنیم، هر قسمت آن یک درجه اســت»، در صورتی‌که می‌دانیم زوایای مرکزیِ متناظر با این قسمت‌ها یک درجه‌اند، نه خود آن قسمت!

شــهریاری (۱۳۷۹) معتقد است که«مثلثات در همهٔ زمینه‌های دانش بشری (از علوم نظری گرفته تا صنایع و فنون) ریشه دوانیده و بدون استفاده از آن، همهٔ رشته‌های علمی دچار نوعی توقف می‌شوند. » (ص ۳۴).

شــورای ملی معلمان ریاضی امریکا (۲۰۰۰) نیز بر ضرورت وجود مثلثات در برنامهٔ درسی ریاضی مدرسه‌ای، تأکید کرده است. با این وجود، تحقیقات حاکی از آن است که فعالیت‌های تدریسی در کلاس‌های ریاضی نتوانسته‌اند فهم درســتی از توابع مثلثاتی را ایجاد کنند (ربانی‌فرد و گویا، ۱۳۸۶).

هدف کلی این تحقیق، شناخت بدفهمی‌های مثلثاتی دانش‌آموزان پایهٔ دوم دبیرســتان و ارائهٔ راهکارهایی برای رویارویی مناسب با این بدفهمی‌ها بود.

این پژوهش، در پی آن بود که ابتدا، بدفهمی‌های دانش‌آموزان پایهٔ دوم دبیرستان را در رابطه با مثلثات شناسایی کند و بعد، برای رویارویی مناسب با آن‌ها، راهکارهایی ارائه دهد. براساس این هدف‌ها، سؤال‌های پژوهشی زیر صورت‌بندی شدند:

۱. اشتباهات مفهومیِ رایج دانش‌آموزان پایهٔ دوم دبیرستان در رابطه با مثلثاتَ کدام‌اند؟

۲. نقش کتاب‌های درسی تازه‌تألیف در رفع یا ایجاد این بدفهمی‌ها چیست؟

۳. چه راهکارهایی برای مواجهه با این بدفهمی‌ها مناسب‌اند؟

در این مقاله، ابتدا گذری کوتاه بر سیر تاریخی مثلثات داریم. در ادامه، به اهمیت و ضرورت حضور مثلثات در برنامه‌های درسی ریاضی مدرسه‌ای، و نیز بعضی یافته‌های تحقیقی در رابطه با ریشهٔ مشکلات و بدفهمی‌های مثلثاتی اشاره می‌کنیم.

کلیدواژه‌ها: مثلثات، بدفهمی، زاویه، رادیان، پایهٔ دهم.

یافته‌های تحقیقی در رابطه با بدفهمی‌های مثلثاتی

استانداردهای شورای ملی معلمان ریاضی امریکا (۱۹۸۹، ۲۰۰۰)، با تأکید بر ارتباط بین زمینه‌های مختلف مثلثاتی، مثلثات را از دیدگاه دانش‌آموزان و معلمان، موضوعی سخت برای فهم و درک معرفی کرده است. هم‌چنین، مطالعه وبر (۲۰۰۵) نشان داد که بسیاری از دانشجویان بعد از یک دورهٔ کامل یادگیری مثلثات، هنوز درک محدودی از توابع مثلثاتی دارند.

تامسون و همکاران (۲۰۰۷)، براون (۲۰۰۶) و وبر (۲۰۰۵) اظهار نموده‌اند که با این وجود، معلمان ریاضی و تولیدکنندگان برنامه‌های درسی، توجه اندکی به مثلثات داشته‌اند. آن‌هایی هم که به مثلثات توجه کرده‌اند، به افزایش تمرکز و نیاز به توسعهٔ فهم بنیادی مثلثات و انسجام بیشتر بین زمینه‌های متعدد مثلثات اشاره کرده‌اند.

البته مور (۲۰۱۰)، مشکلات دانش‌آموزان را در توسعهٔ ارتباطات مثلثاتی، به احتمال زیاد، چندوجهی می‌داند. به این معنا که آن را ناشی از زمینه‌های آموزشی نامرتبط یا با ارتباط کم در آموزش مثلثات است. وبر (۲۰۰۵) پیشنهاد می‌کند که دانش‌آموزان باید قادر باشند از هندسه، به‌عنوان اهرمی در مثلثات استفاده کنند (مانند دایرهٔ واحد و مثلث قائم‌الزاویه) تا بتوانند از استدلال‌هایشان در ارتباط با فرمول‌های توابع سینوس و کسینوس دفاع کنند. این در حالی است که مور (۲۰۱۰)، ادبیات تحقیق در زمینهٔ تفکر دانش‌آموزان را در مثلثات نادر می‌داند. مارکل نیز با توجه به محدودیت تحقیقات آموزش ریاضی و آموزش مثلثات، از مثلثات با عنوان «فراموش‌شده و مورد آزار قرار گرفته» یاد می‌کند. براون (۲۰۰۶) بیان می‌کند که ممکن است کم‌توجهی نسبت به تحقیقات مربوط به مثلثات و به‌طور طبیعی، کمبود یافته‌های پژوهشی در حوزهٔ آموزش مثلثات، به‌علت سهم کم و مختصری باشدکه مثلثات، در برنامه‌های درسی ریاضی مدرسه‌ای دارد.

وبر (۲۰۰۸) معتقد است که یادگیری توابع مثلثاتی برای دانش‌آموزان، در ابتدا، مملو از مشکلات است. مثلثات چالش‌های زیادی برای اولین‌بار برای دانش‌آموز ایجاد می‌کند، او نیاز دارد اشکال مثلث‌ها را با روابط عددی مرتبط کند و نمادهای درگیر در این ارتباط را با مهارت بیاموزد. به‌علاوه، تابع‌های مثلثاتی از اولین تابع‌هایی هستند که دانش‌آموزان قادر نیستند مستقیماً با انجام محاسبات، مقدار آن‌ها را به‌دست آورند. وبر تأکید دارد که با وجود اهمیت مثلثات و مشکلات بالقوهٔ دانش‌آموزان در یادگیری آن، تحقیقات مرتبط اندکی بر این موضوع متمرکز شده است.

گور (۲۰۰۹) در تحقیقی، خطاهای شناسایی شده در مثلثات را در پنج مقوله، شامل «استفادهٔ نادرست از داده‌ها»، «تفسیر نادرست زبانی»، «استنباط‌های منطقی غیرمعتبر»، «تعریف‌های مخدوش» و «خطاهای تکنیکی-مکانیکی» دسته‌بندی کرد. وی دریافت که بعضی دانش‌آموزان، دارای بدفهمی‌ها و پیچیدگی‌های یادگیری زیادی در مثلثات هستند که حاکی از آن است که قبل از یادگیری مفاهیم اصلی مثلثات، بعضی از مفاهیم ریاضی را نادرست یا ناقص یاد گرفته‌اند؛ مفاهیمی که برای یادگیری مفاهیم مثلثاتی، پایه‌ای هستند، مفاهیمی مانند دایرهٔ واحد، مختصات نقاط محیط دایره و ارتباطش با طول و عرض، فاکتورگیری و رابطهٔ فیثاغورس.

کندل[2] و استیسی[3] (۱۹۹۶) با بررسی دو روش تدریس مثلثات، یعنی روش نسبت و روش دایره، نقاط ضعف و قوت هر یک را بررسی کردند و نتیجه گرفتند که دانش‌آموزان در روش نسبت (استفاده از مثلث قائم‌الزاویه)، درک مناسبی از توابع سینوسی و کسینوسی به‌دست نمی‌آورند. آن‌ها مشکلات دانش‌آموزان را در مسائل کلامی مثلثات، در دو دسته طبقه‌بندی کردند:

۱. قدرت تشخیص تابع مثلثاتی مناسب برای حل مسئله؛ به این معنی که درحل مسئله مرتبط با مثلث قائم‌الزاویه، نمی‌توانند تابع مثلثاتی مناسب را تشخیص دهند.

۲. مدل‌سازی مسئله به‌صورت معادلهٔ قابل حل.

برای نمونه، براون (۲۰۰۶) و وبر (۲۰۰۵) به نقل از مور (۲۰۰۹) بیان می‌کنند که دانش‌آموزان در ساختن درک منسجمی از مثلثات و توابع مثلثاتی مشکل دارند و مور (۲۰۰۹) دریافت که مشکل اصلی، ناشی از درک ضعیف دانش‌آموزان از اندازهٔ زاویه و دانش تکه‌تکه‌ای است که از مثلث قائم‌الزاویه و دایرهٔ مثلثاتی در رابطه با اندازهٔ زاویه به‌دست می‌آورند. مور (۲۰۰۹) با بیان اینکه موضوعات مختلف فیزیک، مهندسی، و علوم دیگر بر فهم مثلثاتی (به‌عنوان مثال، سرعت پرتابه و حرکت موجی) تکیه می‌کنند، بنا به یافته‌های براون (۲۰۰۶)، تامپسون(۲۰۰۸) و وبر(۲۰۰۵) معتقد است که اغلب دانش‌آموزان، در موضوعات مبتنی بر فهم تابع‌های مثلثاتی، مشکل دارند. اورهان (۲۰۰۸) نیز در تحقیق خود به این نتیجه رسید که اشتباهات دانش‌آموزان در مثلثات، نظام‌وار است و اکثر آن‌ها، ریشه درچگونگی ارتباط بین اضلاع مثلث قائم‌الزاویه و زاویه‌های آن دارد. شاید یکی از علت‌های اصلی این بدفهمی‌ها، همان‌طور که کی‌یِرن[۴] (۱۹۹۴) معتقد است، این است که در گذشته، به‌طور سنتی، مهارت در روابط مثلثاتی خیلی مهم در نظر گرفته می‌شد و یکی از اهداف اصلی تدریس مثلثات، افزایش توانایی دانش‌آموزان در انجام عملیات با این روابط بود.

مور (۲۰۱۲) با بررسی برنامه‌های درسی ریاضی مدرسه‌ایِ آمریکا، دریافت که در آن‌ها، توابع مثلثاتی اغلب به دو روش معرفی می‌گردد؛ یکی با مثلث قائم‌الزاویه و دیگری با دایرهٔ واحد. او مشکلات دانش‌آموزان را در ارتباط با توابع مثلثاتی، نتیجهٔ بی‌ارتباطی یا ارتباط کم بین این دو زمینه می‌داند و معتقد است که به‌سبب این عدم ارتباط، دانش‌آموزان نمی‌توانند درک منسجمی از تابع‌های مثلثاتی داشته باشند. مور مدعی است که چنین انسجامی، نیازمند توسعهٔ تصورات دانش‌آموزان از اندازهٔ زاویه و استفاده از آن، به‌عنوان پایه‌ای برای ایجاد انسجام بین این دو روش، است.

مور (۲۰۱۲) توضیح می‌دهد که منظور وی از انسجام مثلثاتی، چیزی بیش از ارائهٔ فهرستی از موضوعات، تعریف‌ها و قراردادهای ریاضی با اهداف دسته‌بندی شده است. از نظر تامپسون (۲۰۰۸)، انسجام مثلثاتی یعنی توسعهٔ مفاهیم مثلثاتی و ایجاد روابط معنادار بین آن‌ها. تامپسون (۲۰۰۸) ادامه می‌دهد که منظور از «انسجام»، تأکید بر مفاهیم و ایده‌ها، برقراری ارتباط بین مفاهیم و نقش هر مفهوم در ساخت و ایجاد سایر مفاهیم مثلثاتی است. به‌طور مثال، معرفی اندازهٔ زاویه قبل از توابع مثلثاتی، اگرچه حسی قوی نسبت به تلفیق مفاهیم مثلثاتی ایجاد می‌کند، اما این تلفیق به تنهایی، مترادف با «انسجام» نیست. بلکه انسجام، به معنای تولیدی از مفهوم اندازهٔ زاویه است که با ساخت‌وسازهای دانش‌آموزان از توابع مثلثاتی سازگار باشد.

در همین رابطه، مور (۲۰۱۰) نشان داده است که بسیاری از مشکلات دانش‌آموزان و معلمان در درک مفاهیم مثلثاتی، ریشه در درک ناقص آن‌ها از مفهوم اندازهٔ زاویه دارد. بِرِسود[۵] (۲۰۱۰) و تامپسون (۲۰۰۸) نیز دریافتند که در برنامه‌های درسی ریاضی مدرسه‌ای ایالات متحدهٔ آمریکا[۶] معمولاً اندازهٔ زاویه و توابع مثلثاتی به روشی ارائه می‌شود که ممکن است مفاهیم ناسازگاری برای اندازهٔ زاویه برحسب درجه و برحسب رادیان ایجاد شوند. ناسازگاری‌هایی که باعث به‌وجود آمدن یک شکاف ذاتی در درک مثلثاتی دانش‌آموزان شود. حتی ممکن است مثلث قائم‌الزاویه را تنها برای اندازهٔ زاویه برحسب درجه و دایرهٔ مثلثاتی واحد را فقط برای اندازهٔ زاویه برحسب رادیان، تصور کنند.

به گفته مور (۲۰۱۲)، اولین تجربهٔ دانش‌آموزان از اندازهٔ زاویه، به استفادهٔ آن‌ها از زاویه‌سنج برای اندازه‌گیری زاویه برمی‌گردد، هنگامی‌که استفاده از زاویه‌سنج را آموخته و قادر به دسته‌بندی زاویه‌ها می‌شوند (مثل زوایای حاده، باز، متمم، مکمل) و از انواع استراتژی‌های محاسباتی مرتبط برای اندازه‌گیری زاویه‌ها استفاده می‌کنند. این استراتژی‌ها و ارتباطات برای هندسه مهم هستند، ولی در این روش محاسباتی برای اندازهٔ زاویه، توجه ویژه‌ای به دایرهٔ مثلثاتی با شعاع واحد که برای اندازه‌گیری زاویه استفاده شده، وجود ندارد. تدریس به دانش‌آموزان با استفاده از یک زاویه‌سنج بدون توجه به واحد اندازه‌گیری، از فیلترهای کمّی اندازه‌گیری زاویه است (تامپسون، ۲۰۱۱). در نتیجه، روش‌های آموزشی که به درستی و به‌طور کمّی زاویه را اندازه‌گیری می‌کنند، برای توسعهٔ یک درک ملموس از اندازه‌گیری زاویه، احتمالاً به شکست می‌انجامند (مور، ۲۰۱۲).

این در حالی است که اغلب، تدریس «رادیان» از روی دایرهٔ مثلثاتی، بدون توجه به زمینهٔ آموزشی «درجه» انجام می‌شود که معمولاً مبتنی بر مثلث قائم‌الزاویه است. این اولین تجربهٔ دانش‌آموز از اندازهٔ زاویه برحسب درجه است. بنا به گفته آکوک (۲۰۰۸) و تاپکو و همکاران (۲۰۰۶)، در چنین وضعیتی، ایجاد بدفهمی‌ها در رابطه با مفاهیم درجه و رادیان در دانش‌آموزان، دور از انتظار نیست، زیرا هر دو، اندازه‌های زاویه بر حسب دو مقیاس متفاوت‌اند.

به‌دلیل اینکه رادیان و درجه، واحدهای اندازه‌گیری

متفاوتی برای کمیتی واحد به‌نام زاویه هستند، پس بهتر است برای ایجاد قدرت مقایسه بین این دو واحد، از زمینهٔ تدریسی استفاده شود که مور (۲۰۱۲) این زمینهٔ مشترک را دایرهٔ واحد مثلثاتی معرفی می‌کند. مور (۲۰۱۲) در تحقیقش به این جمع‌بندی رسید که تدریس مثلثات، دارای پیچیدگی‌های زمینه‌ای زیادی است و همین پیچیدگی‌ها، فرصت مغتنمی برای یادگیری مثلثات ایجاد می‌کند. علاوه بر این، به باور وی، معمولاً هنگامی‌که یک مفهوم جدید ریاضی به دانش‌آموزان معرفی می‌شود، بدفهمی‌های جدی رخ می‌دهد. علت این است که یا دانش‌آموزان آمادگی لازم را برای درک مفهوم جدید ندارند یا اینکه مفهوم جدید، بسیار مجرد است. لنسدل[۷] معتقد است برای اینکه بدفهمی‌های جدی دانش‌آموزان نسبت به مفهوم جدید تشخیص داده شده و برطرف شود، لازم است شرایط بیان توضیح و توجیه پاسخ‌های داده شده از طرف دانش‌آموزان ایجاد شود، و برای این کار، استفاده از روش ارزشیابی مبتنی بر استدلال کردن، رویکردی مناسب است.

وبر (نقل شده از ربانی‌فرد و گویا، ۱۳۸۶) نیز به دو محدودیت در فهم توابع مثلثاتی اشاره می‌کند که یکی از آن‌ها، مربوط به نقشی است که نمودارهای هندسی در فهم توابع مثلثاتی و ارتباط دادن این توابع به مدل‌های هندسی مناسب، بازی می‌کنند. مطالعهٔ وی نشان داد که دانش‌آموزان، توابع مثلثاتی را با مدل هندسی‌شان مرتبط نمی‌کنند. مثلاً هنگامی‌که از آن‌ها خواسته شد $\sin\theta$ را برای یک θ خاص تقریب بزنند، بیشتر دانش‌آموزان عنوان کردند که اطلاعات آن‌ها برای این کار کافی نیست. بعضی‌ها هم ادعا کردند اگر مثلث مناسبی داشته باشند، می‌توانند $\sin\theta$ را تقریب بزنند. علاوه بر این، براون[۸] (نقل شده در ربانی‌فرد، ۱۳۸۶) دریافت که فهم مثلثاتی دانش‌آموزان در رابطه با سینوس و کسینوس، ناقص است. وی این بدفهمی‌ها را در سه دستهٔ زیر معرفی کرد:

۱. سینوس و کسینوس به‌عنوان مؤلفه‌های یک نقطه در دایره واحد؛

۲. سینوس و کسینوس به‌عنوان فاصله‌های عمودی و افقی آن نقطه؛

۳. سینوس و کسینوس به‌عنوان نسبتی از اضلاع مثلث.

در همین راستا، تحقیقات بلکت و تال (۱۹۹۱) در تأیید تأثیر مثبت استفاده از تکنولوژی، و در اینجا بهتر است بگوییم ابزار، در تدریس مثلثات است. درتحقیقی که بلکت و تال انجام دادند، دو گروه از دانش‌آموزان شرکت کردند که گروه اول، با ابزار آموزش دیدند که به آن‌ها اجازه می‌داد تا اعداد و روابط هندسی را در یک حالت تعاملی کشف کنند. مثلاً دانش‌آموزان با امتحان کردن چند زاویه خاص، می‌توانند حدس بزنند که تانژانت زاویه، با سینوس زاویه تقسیم بر کسینوس زاویه مساوی است. در صورتی که گروه دوم در همان مدرسه، توسط معلمی آموزش دیدند که به‌صورت سنتی مثلثات را تدریس می‌کرد. یافته‌های این مطالعه نشان داد که دانش‌آموزانی که با کمک ابزار آموزش دیده بودند، عملکرد بهتری نسبت به گروه دیگر داشتند. آنان به این نتیجه رسیدند که با استفاده از ابزار، دانش‌آموزان می‌توانند با شکل‌های متنوع و مختلف هندسی دست‌ورزی می‌کنند و خود، روابط عددی و مثلثاتی را کشف می‌کنند. از طرف دیگر، استفاده از ابزار در تدریس مثلثات باعث می‌شود تا دانش‌آموزان به مفاهیم بیشتر توجه کنند و برای محاسبات عددی غیرضروری، وقت خود را تلف نکنند.

در این مطالعه ۵۴ دانش‌آموز پایهٔ دهم شرکت کردند که همگی، در کلاسی بودند که نویسنده اول مقاله، معلم ریاضی آن بود. ابزار جمع‌آوری داده‌ها، آزمونی با هفت دسته سؤال بود که در این مقاله، تنها به ارائهٔ نتایج سؤال‌های سه دستهٔ اول می‌پردازیم. همهٔ سؤال‌ها برگرفته از کتاب درسی مربوط بود.

سؤال‌های دستهٔ اول

سؤال ۱: زوایای ۳- رادیان و 3π- رادیان، چه کسری از دایرهٔ مثلثاتی هستند؟ اندازهٔ آن‌ها را برحسب درجه بیان کنید (با تقریب سه رقم اعشار)

این سؤال، تمرین شمارهٔ دو از مسائل صفحهٔ ۱۲۸ کتاب ریاضیات ۲ متوسطه است که با انجام ویرایش‌های زیاد انتخاب شد:

- اضافه کردن «،» بعد از رادیان، حذف «ی» دایره‌ی، حذف عبارت مبهم «طی شده» و جایگزینی «مثلثاتی» به‌جای آن، حذف «ی» اندازه‌ی.

سؤال ۲: π رادیان با π درجه چه فرقی می‌کند؟ توضیح دهید.

هدف از سؤال‌های این دسته، بررسی درک مفهومی دانش‌آموزان از مفاهیم درجه و رادیان، ارتباط بین درجه و رادیان و سنجش قدرت به‌کارگیری این مفاهیم برای حل مسائل کاربردی بود.

سؤال‌های دستهٔ دوم

سؤال ۱:

الف. اگر $\cos\theta = \frac{۲}{۵}$ باشد، $\sin\theta$ چقدر است؟

ب. این مقدارها را روی صفحهٔ مختصات نشان دهید.

(تمرین شمارهٔ ۲ صفحهٔ ۱۳۱ کتاب ریاضیات ۲ متوسطه)

سؤال ۲: اگر زاویهٔ θ در موقعیت استاندارد باشد، یعنی نقطهٔ انتهایی کمان θ، دایرهٔ مثلثاتی را در نقطهٔ $(\frac{-۲}{\sqrt{۵}},\frac{۱}{\sqrt{۵}})$ قطع کند، مقادیر $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ و $\tan\theta$ را در این نقطه حساب کنید.

این سؤال، تمرین شمارهٔ ۳ از مسائل صفحهٔ ۱۳۱ کتاب ریاضیات ۲ متوسطه است که با انجام ویرایش‌های زیر انتخاب شد:

- حذف «ی» از انتهای کلمات زاویه‌ی، دایره‌ی، نقطه‌ی؛
- جایگزینی «یعنی» به‌جای «به‌طوری که»؛
- جایگزینی «این نقطه» به‌جای «نقطهٔ فوق».

سؤال ۳: با استفاده از دایرهٔ مثلثاتی، درستی یا نادرستی عبارت $\cos ۴ = \cos(-۴)$ را بررسی کنید. (زوایای فوق برحسب رادیان هستند.)

این سؤال، تمرین شمارهٔ ۲ از مسائل صفحهٔ ۱۳۸ کتاب ریاضیات ۲ متوسطه است که با انجام ویرایش کامل، صورت سؤال بازنویسی شد. صورت سؤال در کتاب درسی به‌صورت زیر بود:

- «۲. عبارت $\cos ۴ = \cos(-۴)$ درست یا نادرست است؟ با استفاده از دایره‌ی مثلثاتی، جوابتان را بررسی کنید. (زوایای فوق برحسب رادیان هستند.)»

هدف از سؤال‌های این دسته، بررسی درک رابطهٔ بین توابع مثلثاتی و ارتباط آن‌ها با دایرهٔ مثلثاتی، و مفاهیم پایه‌ای مثلثات از جمله موقعیت استاندارد زاویه و کمان بود. به‌دلیل هم‌پوشانیِ هدفِ سؤال‌های اول و سوم توسط سؤال دوم، این دو سؤال از سؤال‌های آزمون اصلی حذف شدند.

سؤال‌های دستهٔ سوم

سؤال ۱: دو مقدار برای θ بین $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{-\pi}{۲}$ پیدا کنید، به‌طوری که $\cos\theta = \frac{۱}{۲}$ باشد.

این سؤال، تمرین شمارهٔ ۶ از مسائل صفحهٔ ۱۳۲ کتاب ریاضیات ۲ متوسطه است که با انجام ویرایش زیر انتخاب شد:

- جایگزینی «برای» به‌جای «از».

سؤال ۲: اگر $\cos\theta = ۰/۲$ باشد (θ برحسب رادیان)، بدون استفاده از ماشین‌حساب، مقادیر $\sin(\frac{\pi}{۲}-\theta)$ و $\cos(\pi+\theta)$ را به‌دست آورید.

این سؤال، تمرین شمارهٔ ۴ از مسائل صفحهٔ ۱۳۹ کتاب ریاضیات ۲ متوسطه است که با انجام ویرایش زیر انتخاب شد:

- جایگزینیِ «بدون استفاده از ماشین‌حساب» به‌جای «بدون ماشین‌حساب».

سؤال ۳: اگر $\sin\theta = \frac{۱}{۲}$، مقدار $\sin ۲\theta$ را به‌دست آورید.

هدف اصلی سؤال‌های این دسته بررسی درک دانش‌آموزان از مفهوم و رابطهٔ زاویه، کمان و تابع مثلثاتی و توانایی استفاده از دایرهٔ مثلثاتی در حل مسائل بود. به‌علاوه، سؤال اول، درک دانش‌آموز از جهت مثلثاتی و تابع کسینوس را نیز می‌سنجد. سؤال دوم درک دانش‌آموز در برخورد با کسینوس زوایای حاده و منفرجه را نیز می‌سنجد و سؤال سوم در پی یافتن درک دانش‌آموز در مواجهه با تغییر زاویه در تابع سینوس است.

یافته‌ها

در این بخش، یافته‌ها به تفکیک هر دستهٔ سؤال، ارائه می‌شوند.

سؤال‌های دستهٔ اول

هدف از طراحی سؤال‌های دستهٔ اول، بررسی درک دانش‌آموزان از مفاهیم درجه و رادیان و ارتباط این دو با هم، تصور آنان از این واحدهای اندازه‌گیری زاویه در دایرهٔ مثلثاتی و هم‌چنین تفاوت مقدار کسری و جهتی در دایرهٔ مثلثاتی بود. سؤال ۱ در پی بررسی رابطهٔ بین رادیان و دایرهٔ مثلثاتی و رابطهٔ بین درجه و رادیان و تفاوت مقدار کسری و جهتی در دایرهٔ مثلثاتی بود و سؤال ۲، در پی بررسی دیدگاه دانش‌آموزان در فهمیدن تفاوت درجه و رادیان و عدد π بود. با توجه به اهداف مرتبط، این دو سؤال در یک دسته قرار گرفتند.

سؤال ۱: زوایای ۳- رادیان و ۳π- رادیان، چه کسری از دایرهٔ مثلثاتی هستند؟ اندازهٔ هر یک را برحسب درجه بیان کنید (با تقریب سه رقم اعشار).

از ۵۴ دانش‌آموز شرکت‌کننده در آزمون، ۴۴ نفر پاسخی به این سؤال ندادند و ۱۰ نفر پاسخ را یا کاملاً غلط نوشته بودند و یا ناقص! در پاسخ‌های داده شده به سؤال اول، جواب‌های ناصحیح قابل توجه بودند. برای مثال، تعداد زیادی در پاسخ به مقدار ۳π-، نوشته بودند $-۳\pi=-۳\times۱۸۰=-۵۴۰$ که بیانگر این است که π را

مســاوی°۱۸۰ می‌دانند، یعنی درک صحیحی از ماهیت عددی π ندارند و نســبت به عدد بودن آن، شــک دارند. هم‌چنین، یکی از خواسته‌های ســؤال این بود که بدانند این مقادیر، چه کســری از دایرهٔ مثلثاتی هستند و نیازی به وارد کردن «–» برای به‌دســت آوردن پاسخ ندارند. این امر بیانگر عدم درک دانش‌آموزان از مفهوم مقدار کسری و تفاوت آن با مقدار جهت‌دار است. تعدادی از دانش‌آموزان فقط با نوشتن فرمول

$$\frac{D}{180}=\frac{R}{\pi}$$

مقدار این زاویه‌ها را برحســب درجه محاســبه کرده بودند که نشــان می‌داد آن‌ها رادیان را به‌عنوان یک واحد اندازه‌گیری مســتقل از درجه نمی‌شناســند و فقط آن را به‌وسیلهٔ درجه می‌توانند توضیح دهند. دانش‌آموزان، تنها فرمول را به خاطر ســپرده و کمتــر به معنای این برابری توجه کرده بودند. هم‌چنین، نتوانستند بین رادیان و دایرهٔ مثلثاتی ارتباط معناداری برقرار کنند.

سؤال ۲: π رادیان با π درجه چه فرقی می‌کند؟ توضیح دهید.

از ۵۴ دانش‌آمــوز شــرکت‌کننده در آزمون، ۴۰ نفر پاســخی به این ســؤال ندادنــد و ۱۴ نفر پاســخ را کاملاً غلط نوشــته بودند! پنج نفر از دانش‌آموزان نوشــته بودند «رادیان دقیق‌تر اســت» و توضیح بیشتری در مورد دلیل این پاسخشــان نداده بودند. علت دادن این پاســخ، شاید به‌دلیل توضیح ندادن ضرورت معرفی رادیان به‌عنوان یک واحد اندازه‌گیری جدیدِ زاویه در کتاب درســی ریاضی۲ است. همان‌طور که در این کتاب درسی دیده شد، معرفیِ رادیان بدون توجیه ضرورت آن اســت و ممکن است مثلاً دانش‌آمــوزان، آن را با واحدهــای اندازه‌گیری طول مانند متر، سانتی‌متر و میلی‌متر که به ترتیب، دقت اندازه‌گیری را بالاتر می‌برند، مقایســه کرده و این نتیجه را گرفته‌اند. پاسخ‌های نادرست دیگر در سه دستهٔ زیر قرار گرفتند.

۱. π رادیان ۴۰۰ واحد اســت و π درجه ۳۶۰ درجه است.

احتمــالاً ایــن پاســخ کــه معــرف پاســخ‌های اکثر دانش‌آموزان اســت، از یادگیری طوطی‌وار این مطلب که «دایره °۳۶۰ و ۴۰۰ گرادیان» اســت ناشــی شده است. به‌علاوه این دانش‌آموزان، برای π هم ارزش عددی قائل نشــده بودند که بیانگر فهم مبهم آن‌ها از π اســت. این مشــکل شــاید به ضعف در معرفی عدد π مربوط باشــد. در ضمــن، این‌ها، واحدهای رادیــان و گرادیان را معادل پنداشته بودند که پاسخ‌های زیر، مؤید این ادعاست.

- π رادیان یعنی دایره را به ۳۶۰ درجه تقسیم کنیم و π درجه مقداری از ۳۶۰ درجه را گویند.
- π رادیان ۲۰۰ درجه اســت، ولــی π درجه ۱۸۰ درجه است.

۲. پاســخ‌ها نشــان دادند کــه دانش‌آمــوزان، عمدتاً نمی‌دانســتند که رادیان چیســت و این را از نامربوطی و بی‌دقتی پاسخ‌ها می‌شد استنباط کرد. انواع پاسخ‌های این دسته به‌صورت زیر بود:

- رادیان برحسب ۱۸۰ است، یعنی هر یک π مساوی با ۱۸۰ درجه است.
- اگر دایره‌ای را به ۳۶۰ قسمت تقسیم کنیم، به هر قســمت درجه می‌گویند و یک درجه را برحســب رادیان حساب می‌کنیم.
- رادیان به ۴۰۰ قســمت درجه‌بندی شده است، اما درجه به ۱۸۰ قسمت درجه‌بندی شده است.
- به‌دست آوردن زاویه بر حسب π را رادیان گویند.
- هر رادیان °۱۸۰ است.
- رادیان دایره را به ۴۰۰ قسمت تقسیم می‌کند، ولی درجه به ۳۶۰ قسمت.
- اگر یک دایره را برحسب درجه حساب کنیم، ۳۶۰ درجه می‌شود ولی اگر برحسب رادیان تقسیم کنیم، ۱۸۰ درجه می‌شود.

۳. پاســخ یکی از دانش‌آموزان، بــه لحاظ ماهیتی با دیگران متفاوت و ویژه بود و جای تأمل بسیار دارد.

- *دایرهٔ مثلثاتی را به ۳۶۰ قسمت تقسیم می‌کنیم که هر قســمت آن، یک درجه است. رادیان که همان π است ۱۸۰ درجه است که یک خط ۱۸۰ یعنی π است و زاویهٔ ۹۰ درجه که $\frac{\pi}{2}$ اســت و زاویهٔ ۲۷۰ درجه که $\frac{3\pi}{2}$ است و زاویهٔ ۳۶۰ درجه 2π است.*

ایــن پاســخ، بیانگر آن اســت که دانش‌آمــوز، تصور درستی از زاویه هم ندارد، چون زاویه‌های متناظر به $\frac{1}{360}$ از محیط هر دایره، یک درجه است و نه هر کدام از ۳۶۰ قسمت محیط دایره. هم‌چنین، رادیان را مساوی π گرفته است و در واقع، تصور عددی نسبت به π ندارد و تنها آن را نمادی از رادیان می‌پندارد و مساوی °۱۸۰ می‌داند.

در جمع‌بنــدی پاســخ‌های ســؤال‌های دســتهٔ اول، می‌توان گفت که در این تحقیق، بیشــتر دانش‌آموزان π را برابــر ۱۸۰ درجه می‌پندارند، درک صحیحی از ماهیت عددی π ندارند و نســبت به عدد بودن آن شک دارند. در واقع، π برای بیشتر دانش‌آموزان مظهر رادیان است. اغلب

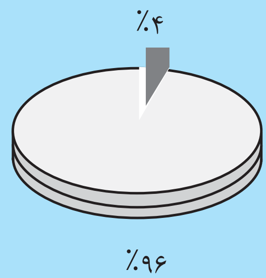
دانش‌آموزان، بیشــترین چیزی که از رادیان می‌دانستند رابطهٔ $\frac{R}{\pi}=\frac{D}{۱۸۰}$ بــود که بیانگر این مطلب اســت که آن را یک واحد مســتقل از درجه نمی‌شناســند و به‌وســیلهٔ درجه می‌توانند در مورد آن اظهار نظر کنند. پاســخ‌های ســؤال اول، نشــان از ضعف دانش‌آموزان در ایجاد ارتباط بین دایرهٔ مثلثاتی و رادیان داشــت. شاید علت اصلی، در نحوهٔ پرداختن کتاب درســی به معرفــی درجه و رادیان باشــد که ابتدا درجه به‌عنوان واحد اندازه‌گیری در مثلث قائم‌الزاویه معرفی می‌شــود و بعد از حل تمرینات متعدد، رادیان به‌عنوان واحد دیگری برای اندازهٔ زاویه و با استفاده از دایرهٔ مثلثاتی معرفی می‌گردد و در کتاب درسی، نسبت به ایجاد ارتباطی مناســب بین این دو واحد، توجه کافی نشــده اســت. مثلاً تعریف رادیــان در صفحهٔ ۱۲۳ کتاب درســی که رادیان را براساس دایرهٔ واحد تعریف می‌کند و دانش‌آموز در ادامه، در درک فرمول رابطه بین طول کمان و اندازهٔ زاویه برحســب رادیــان یعنی $\theta=\frac{L}{r}$ در صفحهٔ ۱۲۵ کتاب درســی دچار سردرگمی می‌شــود. به‌علاوه، در مــورد علــت این صورت‌بنــدی، هیــچ توضیحی داده نشــده اســت. هم‌چنین، توضیح مختصر و گیج‌کننده‌ای در مــورد رابطــهٔ درجه و رادیــان و فرمول $\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}$ در صفحهٔ ۱۲۴ کتاب درسی آمده است که این امر، می‌تواند از علت‌های احتمالی این ضعف در بین دانش‌آموزان باشد. نحــوهٔ زاویه‌بندی و پرداختن بــه رابطهٔ درجه و رادیان در شکل‌های ارائه شده در کتاب درسی، از علت‌های دیگر در وجــود بدفهمی‌های موجود در بین دانش‌آموزان می‌تواند باشد. مثلاً در شکل مربوط به «تمرین در کلاس» شمارهٔ ۳ صفحهٔ ۱۲۵ کتاب درسی، کمان نشان‌دهندهٔ زاویه است و تنها زوایای سرراســت نظیر ۲۷۰° را می‌توان محاسبه کرد، و محاسبهٔ زوایای غیرسرراست مثل ۲۲/۱۸۵، تقریباً ممکن نیست.

سؤال دستهٔ دوم

هدف از ســؤال این دسته، بررســی درک رابطهٔ بین توابع مثلثاتی و ارتبــاط آن‌ها با دایرهٔ مثلثاتی، و مفاهیم پایه‌ای مثلثات از جمله موقعیت اســتاندارد زاویه و کمان بود.

سؤال: اگر زاویهٔ θ در موقعیت استاندارد باشد، یعنی نقطــهٔ انتهایی کمان θ، دایــرهٔ مثلثاتی را در نقطهٔ $(\frac{۱}{\sqrt{۵}},\frac{-۲}{\sqrt{۵}})$ قطع کند. مقادیــر cosθ، sinθ و tanθ را در این نقطه حساب کنید.

شکل ۱: نمودار درصد پاسخ‌ها به سؤال دستهٔ دوم۴ درصد



از ۵۴ دانش‌آموز شــرکت‌کننده در پژوهش، ۵۱ نفر پاسخی به این سؤال نداده بودند. از سه نفر بقیه هم که به این سؤال پاسخ داده بودند، تنها پاسخ دو نفر درست و نفر سوم اشتباه بود. پاسخ درست به‌صورت زیر بود:

$$(\frac{۱}{\sqrt{۵}},\frac{-۲}{\sqrt{۵}})=(\cos\theta,\sin\theta)\Rightarrow \quad =$$

$$x=\cos\theta=\frac{۱}{\sqrt{۵}},\ y=\sin\theta=\frac{-۲}{\sqrt{۵}},$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{-۲}{\sqrt{۵}}}{\frac{۱}{\sqrt{۵}}}=-۲$$

دانش‌آموزی که پاســخ اشــتباه داده بود، cosθ را با مؤلفهٔ دوم یعنی $\frac{-۲}{\sqrt{۵}}$ و sinθ را با مؤلفهٔ اول یعنی $\frac{۱}{\sqrt{۵}}$، مختصات نقطهٔ مساوی قرار داده بود و در ادامه با استفاده از فرمول $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$، مقدار tanθ را $\frac{-۱}{۲}$ به‌دســت آورده بود. با پرسش از او در مورد علت این پاسخ، متوجه اشتباه این دانش‌آموز در به‌خاطر سپردن ترتیب مؤلفه‌ها که به ســینوس و کســینوس زاویه اختصــاص می‌دهند، شدیم که بیانگر یادگیری حافظه‌محور وی بود.

درصد پایین پاســخ به این سؤال، شاید حاکی از عدم توانایی دانش‌آموزان در برقراری ارتباط بین توابع مثلثاتی و دایرهٔ مثلثاتی باشــد؛ یــا اینکه از معرفی ایــن توابع از طریق نســبت‌های مثلث قائم‌الزاویه ناشی می‌شود. یعنی دانش‌آموزان، نسبت‌های مثلثاتی را به‌عنوان یک تابع درک نکرده‌اند، برخلاف آنکه در دایرهٔ مثلثاتی، سعی در معرفی نســبت‌های مثلثاتی به‌عنوان تابع می‌شود. این در حالی اســت که پاسخ‌های این سؤال نشان داد که دانش‌آموزان، «زاویهٔ در حالت استاندارد» را نمی‌شناسند و انتهای کمان را در حالت اســتاندارِد زاویه، تشخیص نمی‌دهند، زیرا در کتاب درســی، به این مهم به‌خوبی پرداخته نشده است.

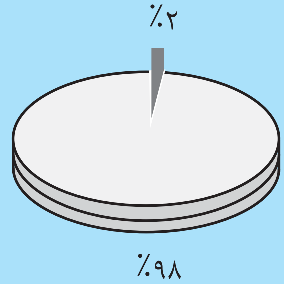
مثلاً شکل مربوط به مثال ۳، صفحهٔ ۱۲۹ کتاب درسی، علاوه بر ایجاد بدفهمی در زاویه و اندازهٔ آن، به ارتباط بین مختصات نقطهٔ انتهای کمان و زاویه در حالت استاندارد نیز نپرداخته است.

سؤال‌های دستهٔ سوم

هدف اصلی سؤال‌های این دسته، بررسی درک دانش‌آموزان از مفهوم و رابطهٔ زاویه، کمان، تابع مثلثاتی و توانایی استفاده از دایرهٔ مثلثاتی در حل مسائل بود. به علاوه با سؤال ۱، قصد داشتیم درک دانش‌آموزان را از جهت مثلثاتی و تابع کسینوس بررسی کنیم. سؤال ۲، درک دانش‌آموز را در برخورد با کسینوس زوایای حاده و منفرجه می‌سنجد و سؤال ۳، در پی درک دانش‌آموز در مواجهه با تغییر زاویه در تابع سینوس است.

سؤال ۱: دو مقدار برای θ بین $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{-\pi}{۲}$ پیدا کنید، به‌طوری که $\cos\theta = \frac{۱}{۲}$ باشد.

شکل ۲: نمودار درصد پاسخ‌ها به سؤال ۱ دستهٔ سوم



از ۵۴ دانش‌آموز شرکت کننده در این پژوهش، ۵۲ نفر پاسخی به این سؤال نداده بودند و از دو نفری هم که پاسخ داده بودند، فقط پاسخ یک نفر صحیح بود. پاسخ صحیح به‌صورت زیر بود:

$\cos\theta = \frac{۱}{۲}$ در نتیجه:

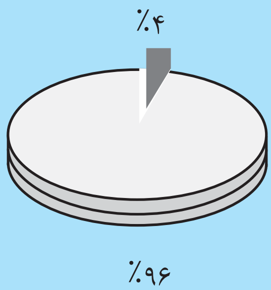
$$\cos ۶۰ = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos -۶۰ = \frac{۱}{۲}$$

پاسخ دیگر که کامل نبود، به‌صورت $\cos ۶۰ = \frac{۱}{۲}$ ارائه شده بود که شاید پاسخ‌دهنده، به محدودهٔ زاویهٔ θ که بین $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{-\pi}{۲}$ بود، توجه نکرده بود و محدودهٔ θ را ربع‌های دوم و سوم فرض کرده بود و این، نشان از وجود بدفهمی در مفهوم بازه است که دانش‌آموز باید آن را از $\frac{-\pi}{۲}$ یعنی ربع چهارم تا $\frac{\pi}{۲}$ یعنی ربع اول در نظر می‌گرفت. از دیدگاه دبیران، این مشکل به کم‌توجهی و نمونه سؤالات اندک کتاب درسی که مشابه با این سؤال باشند، برمی‌گردد. به‌علاوه، ناتوانی دانش‌آموزان در استفاده از دایرهٔ مثلثاتی برای حل این سؤال، واضح بود.

سؤال ۲: اگر $\cos\theta = ۰/۲$ باشد (θ برحسب رادیان)، بدون استفاده از ماشین‌حساب، مقادیر $\sin(\frac{\pi}{۲} - \theta)$ و $\cos(\pi + \theta)$ را به‌دست آورید.

شکل ۳: نمودار درصد پاسخ‌ها به سؤال ۲ دستهٔ سوم



از ۵۴ دانش‌آموز شرکت‌کننده در آزمون، به این سؤال، تنها دو نفر پاسخ صحیح و سه نفر پاسخ اشتباه داده بودند و بقیهٔ دانش‌آموزان، اصلاً پاسخی نداده بودند. دو پاسخ اشتباه به‌صورت زیر بود:

$$\cos\theta = ۰/۲$$

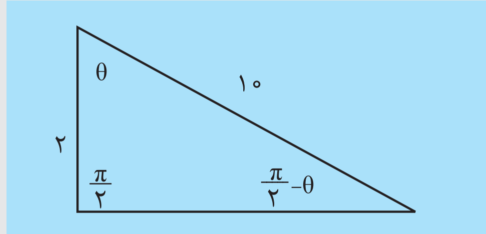
آن‌گاه

$$\sin(\frac{\pi}{۲} - \theta) = ۸۹/۸, \cos(\pi + \theta) = ۱۸۰/۲$$

این دو دانش‌آموز، اصلاً نقشی برای سینوس و کسینوس در پاسخ‌هایشان قائل نشده بودند و این توابع را فقط به‌عنوان دستگاهی که زاویه‌ها را به‌عنوان ورودی گرفته و آن‌ها را به خروجی می‌برد، فهمیده بودند که نشان از فهم و درک ضعیف آن‌ها از مفهوم تابع داشت.

یکی دیگر از دانش‌آموزان با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه مانند شکل صفحه بعد ، پاسخ $\sin(\frac{\pi}{۲} - \theta)$ را به‌درستی به‌دست آورده، ولی نتوانسته بود $\cos(\pi + \theta)$ را محاسبه کند:

چون $\cos\theta = ۰/۲$ پس

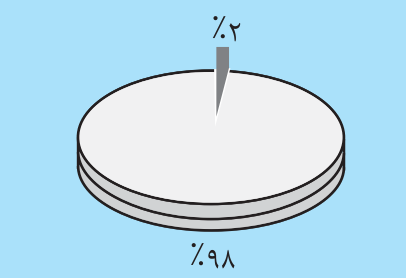


$$\sin(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{۲}{۱۰}=۰/۲$$

این پاسخ بیانگر آن است که دانش‌آموز، درک خوبی از نسـبت‌های مثلثاتی که به‌وسـیلهٔ مثلث قائم‌الزاویه در سال‌های قبل معرفی شده داشته و به‌خوبی از آن‌ها برای به‌دست آوردن مقدار $\sin(\frac{\pi}{۲}-\theta)$ استفاده کرده بود، ولی نتوانسـته بود از دایرهٔ مثلثاتی برای به‌دست آوردن مقدار $\cos(\pi+\theta)$ استفاده کند که این حاکی از ضعف دانش‌آموز در برقـراری ارتباط بین تابع مثلثاتی و دایرهٔ مثلثاتی بود. این دانش‌آموز قادر به محاسـبهٔ نسـبت‌های مثلثاتی در محدودهٔ زاویهٔ حاده و با اسـتفاده از مثلث قائم‌الزاویه بود. ولی در محاسـبهٔ مقدار تابع مثلثاتـی زاویه‌های غیرحاده دچار مشـکل شده بود. شـاید این مشکل، از اینکه حتی یک مورد توضیح در نحوهٔ به‌دسـت آوردن مقادیر توابعی مشابه $\cos(\pi+\theta)$ در کتاب درسی نیست، ناشی می‌شود، چون این قسمت که از صفحهٔ ۱۳۲ کتاب درسی با عنوان «تعیین مقادیر مثلثاتی برای تمام زوایا» شـروع می‌شود، کلاً در قالب فعالیت و بر عهدهٔ دانش‌آموز گذاشـته شـده است.

سـؤال ۳: اگـر $\sin\theta=\frac{۱}{۲}$، مقـدار $\sin ۲\theta$ را به‌دست آورید.

شکل ۴: نمودار درصد پاسخ‌ها به سؤال ۳ دستهٔ سوم



از ۵۴ دانش‌آموز شرکت‌کننده در آزمون، فقط یک نفر به این سؤال، به‌درستی پاسخ داده بود و پاسخ ده نفر دیگر، اشـتباه بود که همگی جواب اشتباه ۱ را داده بودند. پاسخ این ده نفر به صورت زیر بود:

$$\sin\theta=\frac{۱}{۲} \quad \text{آن‌گاه} \quad \sin ۲\theta=۲\sin\theta=۲(\frac{۱}{۲})=۱$$

گـور (۲۰۰۹) در تحقیقـی، خطاهای شناسایی شده در مثلثات را در پنج مقوله، شـامل «اسـتفادهٔ نادرسـت از داده‌هـا»، «تفسیر نادرسـت زبانی»، «استنباط‌های منطقـی غیرمعتبـر»، «تعریف‌هـای مخـدوش» و «خطاهـای تکنیکـی- مکانیکی» دسـته‌بندی کرد. وی دریافت که بعضـی دانش‌آموزان، دارای بدفهمی‌ها و پیچیدگی‌هـای یادگیـری زیـادی در مثلثات هسـتند که حاکی از آن است که قبـل از یادگیری مفاهیـم اصلی مثلثات، بعضـی از مفاهیـم ریاضی را نادرسـت یا ناقـص یـاد گرفته‌اند؛ مفاهیمـی که برای یادگیری مفاهیم مثلثاتی، پایه‌ای هستند، مفاهیمی مانند دایرهٔ واحد، مختصات نقاط محیط دایره و ارتباطـش با طول و عرض، فاکتورگیری و رابطهٔ فیثاغورس

این دانش‌آموزان، روابط سینوسـی را به‌صورت تابعی خطـی از زاویهٔ ورودی در نظر گرفتـه بودند که می‌تواند ناشی از عدم تأکید کتاب درسی به این مطلب باشد. چون فقط تمرین ۷ صفحهٔ ۱۳۶ از کتاب درسی که در قسمت مسـائل گنجانده شده است، مربوط به بررسی این مطلب است.

هم‌چنیـن، دانش‌آمـوزان اولین‌بار اسـت که به‌طور مستقیم، قادر به محاسبهٔ این مقدارها نیستند و این پاسخ را در ادامـهٔ مطالب قبلی، موجه می‌دانسـتند. ایجاد یک تقابـل مفهومی در کلاس درس و کتاب درسـی و تأکید بر آن، کمک شایانی به رفع چنین بدفهمی‌هایی در ذهن دانش‌آموزان می‌کند. مثلاً می‌شـود مشابه روند کتاب، با ارائهٔ فعالیتی، مقادیر $\sin ۶۰^\circ$ و $۲\sin ۳۰^\circ$ با هم مقایسه شـوند و سپس، نتیجهٔ کلی برای تابع سینوس بیان شود، یعنی: $\sin(\pi+\theta)\neq\sin\pi+\sin\theta$ و به همین ترتیب، برای کل توابع مثلثاتی بر این نکته تأکید شود.

اسـتدلال دانش‌آموزی که پاسـخ صحیـح داده بود،

به‌صورت زیر بود:

$$\sin\theta = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \theta = ۳۰^\circ$$

$$\theta = ۳۰^\circ \Rightarrow ۲\theta = ۶۰^\circ$$

$$\sin ۲\theta = \sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

این اســتدلال، بیانگــر آن بود که ایــن دانش‌آموز از ویژگی‌های توابع خطی آگاه بود و می‌دانست که سینوس، تابعی خطی نیست.

در جمع‌بندی پاســخ‌های این دســته، نکات ظریفی قابل بیان است، از جمله اینکه بعضی دانش‌آموزان، روابط سینوسی را به‌صورت تابعی خطی از زاویهٔ ورودی در نظر گرفته بودند و تنها قادر به محاســبهٔ نسبت‌های مثلثاتی در محــدودهٔ زاویهٔ حاده و با اســتفاده از مثلث قائم‌الزاویه بودند. هم‌چنین در محاسبهٔ مقدار تابع مثلثاتیِ زاویه‌های غیرحاده، دچار مشکل بودند، یعنی به‌خوبی، نمی‌توانستند از دایرهٔ مثلثاتی استفاده کنند.

علاوه بر ایــن، بعضی از دانش‌آموزان، در تشــخیص مقدار تابع مثلثاتی یک زاویهٔ منفرجه مشکل داشتند.

یافته‌هــای ایــن تحقیــق نشــان داد کــه رایج‌ترین بدفهمی‌های مثلثاتی دانش‌آموزان پایهٔ دوم دبیرستان در این موارد است:

– مفهوم اندازهٔ زاویه را به‌خوبی درک نمی‌کنند؛

– بــا مقیاس رادیان برای انــدازهٔ زاویه، ارتباط برقرار نمی‌کنند و با مشکل مواجه هستند؛

– در تخمین و تعیین محدودهٔ نســبت‌های مثلثاتیِ زاویه‌هــای ناشــناخته، ناتوان هســتند و دچار مشــکل می‌شوند؛

– از مثلث قائم‌الزاویه در مقایســه بــا دایرهٔ مثلثاتی، بیشتر برای حل مسئله استفاده می‌شود و به‌خوبی از دایرهٔ مثلثاتی برای حل مسئله، نمی‌توانند استفاده کنند؛

– نســبت‌های مثلثاتــی را به‌عنــوان توابــع خطــی می‌پندارند.

نتیجه‌گیری

نتایج، حاصل تجزیه‌وتحلیل پاســخ‌های دانش‌آموزان به ســؤال‌های آزمونی است که به قصد جمع‌آوری داده‌ها طراحی شــده بود. ســؤال‌های آزمون، با دانش محتوایی مورد نظر کتاب ریاضی پایهٔ دوم متوسطه از دانش‌آموزان متناســب بــود. یافته‌هــا می‌تواند برای همهٔ کســانی که با تدریس ریاضی در دورهٔ متوســطه در ارتباط هســتند، سودمند باشد. یادگیری مثلثات دغدغهٔ بسیاری از دبیران ریاضی است. این همکاران، با علاقه به دنبال علل مشکلات دانش‌آموزان در یادگیری مثلثات هســتند و در ارتباط با آن، بــه بحث و مناظره می‌پردازند؛ آن‌ها از پژوهشــگران انتظار دارند که نسبت به یادگیری و تدریس مثلثات، که نقش برجســته‌ای در برنامهٔ درسی ریاضی دورهٔ متوسطه در ایران دارد، بپردازند.

بیشــتر مدیــران و دبیــران از انجــام ایــن پژوهش حمایــت کردند، اگرچه نتایــج آن را قابــل پیش‌بینی و آشکار می‌دانســتند. آن‌ها انتظار داشتند که انجام چنین پژوهش‌هایی بتواند به ارائهٔ راهکارهای عملی برای بهبود تدریــس و یادگیری مثلثــات بیانجامد. به بــاور دبیران، وجــود بدفهمی‌ها در آموزش و یادگیری ریاضی در ایران، تا حد زیادی عمومیت دارد و به‌همین خاطر، لازم اســت در این زمینه، پژوهش‌های متعددی انجام شــود. دبیران ریاضی بیان نمودند که به‌دلیل «مشکل بودن مثلثات» و به اصطلاح «فرّار» بــودن آن، تدریس مثلثات را به‌عنوان «فصل آخر»، به پایان سال تحصیلی موکول می‌کنند که «تا حد امکان» به امتحانات پایانی «نزدیک» باشد.

– در مــورد آزمــون، نظــر دانش‌آموزان ایــن بود که ســاختار آن، با سایر آزمون‌هایی که تا آن وقت داده بودند متفاوت است زیرا به دنبال استدلال است.

– معلمان نیز ســؤال‌های آزمون را «بســیار بالاتر از سطح توانایی‌های دانش‌آموزان» می‌دانستند.

– چــون الزامی برای ذکر نام و نــام خانوادگی وجود نداشــت، انتظار می‌رفت که پدیــده‌ای به نام «تقلب» رخ ندهــد. اما با وجودی که بیشــتر دانش‌آمــوزان هم نام و نام خانوادگی را ننوشــته بودنــد، باز هم مواردی از تقلب، از قبیل اســتفاده از جزوه و کمک گرفتن از نوشــته‌های دانش‌آموز کنار دســتی، دیده شد که به‌نظر می‌رسد این ناشــی از ترس و اضطراب دانش‌آمــوزان در مواجهه با هر نوع «امتحان» بوده اســت. بالاخــره، جمله‌ای که یکی از دانش‌آموزان در همهٔ برگه‌های پاســخ‌نامهٔ خود نوشته بود جالب بود. وی نوشــته بود کــه، «۵ درصد را نمی‌فهمم و ۹۵ درصد را بلد نیستم»! تجزیه‌وتحلیل داده‌ها این نتیجهٔ کلی را به‌دست داد که دانش‌آموزان، از نظر درک مفاهیم مثلثاتی در سطحی که انتظار می‌رود نیستند و مشکلات و بدفهمی‌های زیادی دارند.

بدفهمی‌های رایج دانش‌آموزان پایهٔ دوم دبیرستان در رابطه با مثلثات کدام‌اند؟

یکــی از مفاهیمی که لازم اســت دانش‌آموزان، برای ورود به موضوع مثلثات، بر آن مســلط باشند اندازهٔ زاویه اســت. در این پژوهش، مشــخص گردید که بســیاری از

دانش‌آموزان، نمی‌توانند زاویه را توضیح دهند و اندازهٔ فضای بین دو ضلع زاویه را اندازهٔ زاویه می‌دانند! این برداشت باعث می‌شود تا آن‌ها در مثلث‌های قائم‌الزاویه و دایره‌های مثلثاتی متفاوت، برای یک زاویه، اندازهٔ مساوی قائل نباشند و خصوصاً در دایره، اندازهٔ زاویه را در رابطهٔ مستقیم با کمان بدون در نظر گرفتن شعاع دایره می‌دانند. دانش‌آموزان در درک رادیان به‌عنوان مقیاس دیگری برای اندازه‌گیری زاویه، دچار مشکل بودند. برای آن‌ها، «مقیاس اصلی برای اندازه‌گیری زاویه» درجه بود. بدین سبب، اکثراً با استفاده از فرمول آن، رادیان را به درجه تبدیل می‌کردند، سپس آن را در دایرهٔ مثلثاتی مشخص می‌نمودند. در واقع، دانش‌آموزان گاهی رادیان را نیز یک نوع زاویه می‌پنداشتند. خصوصاً از π، مفهوم مبهمی در ذهن داشتند و اکثراً آن را به‌عنوان عدد نمی‌شناختند بلکه نماد رادیان می‌انگاشتند. هم‌چنین، نمی‌توانستند بین زاویهٔ استاندارد در دایرهٔ مثلثاتی و مختصات نقطهٔ انتهای کمانی که آن را در برگرفته است و نسبت‌های مثلثاتی، رابطه برقرار کنند. بسیاری از دانش‌آموزان، بازه‌های زاویه‌های دایرهٔ مثلثاتی را به‌درستی تشخیص نمی‌دادند. مثلاً وقتی زاویه محدود به $\frac{-\pi}{۲}$ تا $\frac{\pi}{۲}$ بود، بیشتر دانش‌آموزان ربع دوم و سوم را در نظر می‌گرفتند. اغلب دانش‌آموزان برای محاسبهٔ مقدار یک زاویه از یک تابع مثلثاتی، از مثلث قائم‌الزاویه کمک می‌گرفتند و کمتر می‌توانستند از دایرهٔ مثلثاتی برای محاسبه استفاده کنند. بیشتر آن‌ها، روابط مثلثاتی را همچون توابع خطی می‌پنداشتند. می‌دانیم یکی از نشانه‌های درک عمیق مطالب، تخمین زدن و مشخص کردن محدودهٔ تقریب، بدون انجام گام‌های عملی است، اما بیشتر دانش‌آموزان، از چنین مهارتی برخوردار نبودند. هم‌چنین، تعداد زیادی از دانش‌آموزان، روابط مثلثاتی را به‌عنوان تابع نمی‌شناختند و بعضی از آن‌ها می‌پنداشتند نسبت‌های مثلثاتی همواره مقداری مثبت دارند.

به‌طور کلی، می‌توان بدفهمی‌ها و مشکلات دانش‌آموزان را به‌صورت زیر بیان کرد:

- مفهوم اندازهٔ زاویه را به‌خوبی درک نمی‌کنند؛
- با مقیاس رادیان، برای اندازهٔ زاویه، ارتباط برقرار نمی‌کنند و با مشکل مواجه‌اند؛
- در تخمین و تعیین محدودهٔ نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های ناشناخته، ناتوان‌اند و دچار مشکل می‌شوند؛
- در مقایسه با دایرهٔ مثلثاتی، بیشتر برای حل مسئله‌های مثلثاتی، از مثلث قائم‌الزاویه استفاده می‌کنند و به‌خوبی، از دایرهٔ مثلثاتی برای حل مسئله نمی‌توانند استفاده کنند؛
- نسبت‌های مثلثاتی را توابع خطی می‌پندارند.

یکی از مفاهیمی که لازم است دانش‌آموزان، برای ورود به موضوع مثلثات، بر آن مسلط باشند. اندازهٔ زاویه است. در این پژوهش، مشخص گردید که بسیاری از دانش‌آموزان، نمی‌توانند زاویه را توضیح دهند و اندازهٔ فضای بین دو ضلع زاویه را اندازهٔ زاویه می‌دانند! این برداشت باعث می‌شود تا آن‌ها در مثلث‌های قائم‌الزاویه و دایره‌های مثلثاتی متفاوت، برای یک زاویه، اندازهٔ مساوی قائل نباشند و خصوصاً در دایره، اندازهٔ زاویه را در رابطهٔ مستقیم با کمان بدون در نظر گرفتن شعاع دایره می‌دانند.

نقش کتاب‌های درسی تازه‌تألیف، در رفع یا ایجاد بدفهمی‌های مثلثاتی دانش‌آموزان، کدامند؟

عملکرد مورد انتظار از دانش‌آموزان، در مورد مبحث مثلثات، که در فصل پنجم ریاضیات ۲ پایهٔ دوم متوسطه (برگرفته از دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی، آخرین چاپ) درج شده چنین است:

دانش‌آموزان باید بتوانند:

۱. با استفاده از دوران نیم‌خط حول مبدأ، اندازهٔ جبری هر زاویه را نمایش دهند. (زاویه را در موقعیت استاندارد رسم کنند)؛

۲. رادیان را تعریف کنند؛

۳. واحدهای اندازه‌گیری زاویه (رادیان و درجه) را به یکدیگر تبدیل کنند؛

۴. اندازهٔ هر زاویه را با معلوم بودن شعاع و طول کمان محاسبه کنند؛

۵. دایرهٔ مثلثاتی را تعریف کنند؛

۶. با استفاده از دایرهٔ مثلثاتی، نسبت‌های مثلثاتی Sin ،Cos هر نقطه را به‌دست آورند؛

۷. بر روی دایرهٔ مثلثاتی، تانژانت هر زاویه را مشخص کنند؛

۸. نسبت‌های مثلثاتی زوایای بین صفر و ۲π را که مقادیر یکسانی دارند مشخص کنند؛

۹. با معلوم بودن مختصات هر نقطه، نسبت‌های مثلثاتی آن را به‌دست آورند؛

۱۰. مقادیر دقیق نسبت‌های مثلثاتی زوایای خاص

را به‌دست آورند؛

۱۱. با اســتفاده از دایرهٔ مثلثاتی زوایای قرینه، متمم، مکمل و ... را به‌دست آورند؛

۱۲. شیب خط را با استفاده از تانژانت زاویه محاسبه کنند.

این در حالی است که نتایج این پژوهش نشان داد که به‌جز انتظار شــمارهٔ ۱۲، که آن هم از اهداف این پژوهش نبــود، تقریباً هیچکدام از انتظارات مــورد نظر که در بالا ذکر شــد حاصل نمی‌شود. با توجه به اینکه کتاب درسی تازه‌تألیــف ریاضیــات ۲ منبع اصلی دانش‌آموزان اســت، ایــن فصل کتاب تحلیل شــد و علاوه بــر آن با چند نفر از دبیران ریاضی هم کــه این کتاب را تدریس می‌کردند مصاحبه‌های غیرســاختاری انجام شد تا علت این فاصلهٔ فاحش بین عملکرد دانش‌آموزان و انتظارات کتاب درسی بررسی شود.

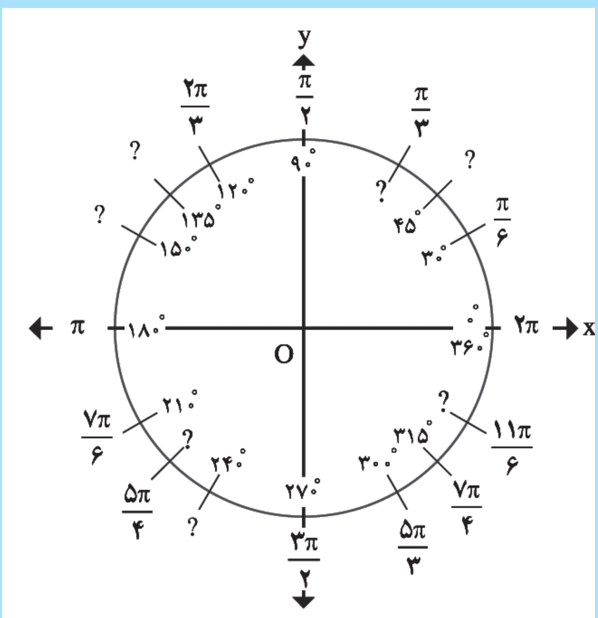
در تحلیل محتوای فصل مثلثات، داده‌های به‌دســت آمده از مصاحبه‌ها و نظرات دبیران در دسته‌های زیر قرار گرفت:

– بســیاری از دبیران، اصلاً بــه متن و محتوای فصل مثلثات کتاب ریاضی ســال دوم دبیرستان توجه ندارند و از ابزار کاغذ شــطرنجی، پرگار و نقاله به‌ندرت در تدریس بهــره می‌برند. آن‌ها در حدی که باید در کتاب مثلثات از این ابزار اســتفاده کنند، مطلع هستند، اما علت تدریس نکــردن مثلثات از روی کتاب درســی را، بیان نامناســب کتاب درسی دانستند.

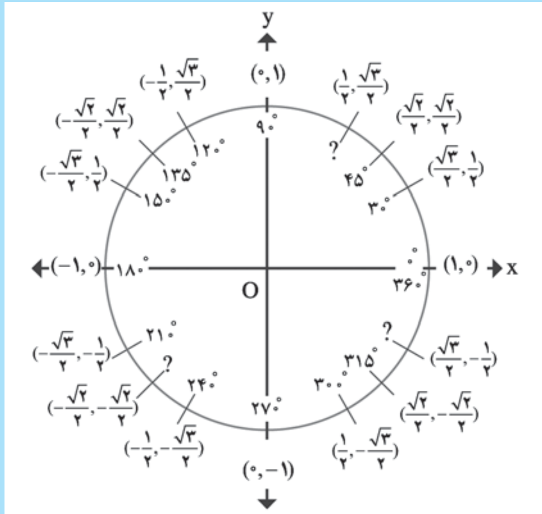
– فصل مثلثات کتاب ریاضی پایهٔ دوم دبیرستان، در تداوم ریاضی پایهٔ اول متوسطه نیست و ارتباط خوبی هم با بخش مثلثات کتاب حسابان رشتهٔ ریاضی ندارد.

– نحوهٔ نمایــش زاویه‌ها روی دایرهٔ مثلثاتی، علاوه بر ایجاد بدفهمی در مفهوم و تعریف زاویه، باعث می‌شــود تا رابطهٔ بین رادیان و درجه، فقط برای بعضی زوایای خاص پنداشــته شود زیرا دانش‌آموز کمان را در این شکل‌ها در رابطهٔ مســتقیم با زاویــه‌ای که آن کمــان را دربر گرفته می‌بینند. مانند موارد زیر در کتاب ریاضی درسی پایهٔ دوم دبیرستان که عیناً و بدون هر ویرایشی نقل می‌شود:

۳- شکل مقابل دایره‌ای به شعاع واحد را نشان می‌دهد که اندازه‌های زوایا برحسب درجه و رادیان با یک‌دیگر معادل هستند. با استفاده از روابط بالا جاهای خالی دایره‌ی فوق را تکمیل نمایید.

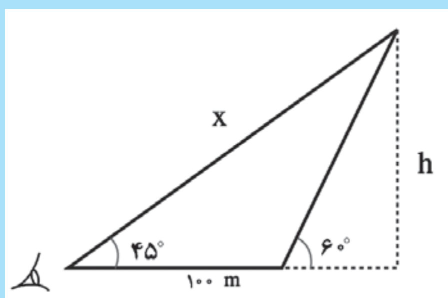


حال مقادیر دقیق سینوس و کسینوس بعضی از زوایای خاص را روی دایره مثلثاتی مشخص می‌کنیم.



- دانش‌آموز، ســؤال‌های کاربردی مثلثات را نمی‌تواند حل کند، زیرا کتاب آن‌چنان که شایســته اســت به این مســائل نپرداخته و نگارش بعضی از تمرین‌ها نیز گیج‌کننده اســت که این خود باعث تضعیف روحیهٔ بیشتر دانش‌آموزان می‌شود. آن‌ها به‌عنوان نمونه، تمرین ۷ صفحهٔ ۱۵۴ ریاضی پایهٔ دوم دبیرستان را مثال زدند.

۷- شــخصی نزدیک آنتن یک ایســتگاه رادیویی ایستاده است. زاویه‌ی دید شخص با نوک آنتن 60° است. اگر او ۱۰۰ متر به عقب برود زاویه‌ای که با نوک آنتن در موقعیت جدید می‌سازد 45° است. ارتفاع آنتن را حساب کنید. (ابتدا مقدار x را پیدا کنید)



- از نظر دبیران، مقدمهٔ فصل خوب است و با مثال جالب ستارهٔ قطبی کار را شروع کرده است، اما به یک‌باره با یک فعالیت وارد بحث اصلی شده است، آن هم فعالیتی که همهٔ دانش‌آموزان با آن مشکل دارنــد. این فعالیت در ادامهٔ مقدمه اســت و بیش از آنکه حس مثلثاتــی در دانش‌آموز به‌وجود آورد در او حس محاســباتی، که موجب دلزدگی اســت، ایجاد می‌کند. به باور دبیران، یادگیرندگان در خصوص محاسبات عددی مشکل دارند، پس بهتر است تا حد ممکن، برای شروع از این‌گونه فعالیت‌ها استفاده نشود.

فعالیت

با توجه به این که ستاره قطبی روی دایره‌ای در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت حرکت می‌کند و این ستاره در هر ۲۳ ساعت و ۵۶ دقیقه و ۴/۳۳ ثانیه، یعنی ۰/۹۹۷۲۷۲۳ شبانه‌روز یک‌بار این دایره‌ی کوچک را طی می‌کند.

– در این کتاب درسی، بحث زاویه، درجه و رادیان شتاب‌زده انجام شده است، بدون اینکه درک درستی از این مفاهیم در دانش‌آموزان ایجاد شده باشد. به عقیدهٔ آن‌ها، ابتدا لازم است دایرهٔ مثلثاتی که اساس کار مثلثات است، تعریف شود و بعد از آن، زاویه تعریف شود.

– بعضی از دبیران ابراز می‌کردند که چون «شیوهٔ بیان کتاب را قبول ندارند»، پس ساختار کتاب را به‌هم می‌ریزند و طبق سلیقهٔ خود، کار را پیش می‌برند و تاکنون هم در تدریس «با مشکلی مواجه» نشده‌اند.

– دبیران هم‌چنین، با ذکر نمونه‌ای توضیح می‌دادند که «بسیاری از مفاهیم کلیدی مثلثات، در تمرین‌ها گنجانده شده است» که به‌نظر، «کار نادرستی» می‌آید. مثلاً تمرین شمارهٔ ۷ صفحهٔ ۱۳۶ کتاب درسی ریاضیات ۲، که بر خطی نبودن توابع مثلثاتی تأکید می‌کند؛ و یا اشارهٔ جزئی به مقدار تقریبی یک رادیان برحسب درجه که منظور جملهٔ «یک رادیان تقریباً ۵۷/۳ درجه است» در فعالیت شمارهٔ ۳ صفحهٔ ۱۲۷ می‌باشد.

۷- با ارائه‌ی مثالی نشان دهید رابطه‌ی زیر همواره درست نیست.

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \pi - \sin \theta$$

۳- با ماشین حساب سینوس و کسینوس ۵۷/۳ درجه را محاسبه کنید و رابطه‌ی بین مختصات نقطه‌ی
P و مقادیر سینوس و کسینوس را بنویسید.

– بعضی از شکل‌های کتاب در بخش مثلثات گیج‌کننده است.

– بعضی از تمرین‌ها بد بیان شده‌اند و باعث سردرگمی هستند. (مانند اشکالات سؤال‌های انتخاب شده برای آزمون این مطالعه که در فصل ۳ اشکالات بیان و اصلاح شد.)

– عنوان‌های نامناسبِ انتخاب شده، مثلاً «تعیین مقادیر مثلثاتی برای تمام زاویه‌ها» عنوان دقیقی نیست.

– به‌نظر می‌رسد کتاب درسی پایهٔ دوم دبیرستان با رویکرد مشارکتی تألیف شده و در اهداف تبیین شده، سهم بیشتری برای ایفای نقش دانش‌آموز در یادگیری، با استفاده از ابزارهایی چون پرگار، نقاله، کاغذ شطرنجی و ماشین‌حساب قائل شده است، اما دو نکته این هدف را دچار مشکل می‌کند؛ اول اینکه این فصل به‌طور کاملاً مجزا و با حجمِ بالا، به نوعی یادآور کتاب‌های مثلثات دورهٔ نظام قدیم است و از این نظر، در جا می‌زند، زیرا مثلاً برای اینکه این مبحث به‌تدریج و مرتبط

با موضوعات دیگر به دانش‌آموزان ارائه شـود، شاید بهتر باشـد تدریس توابع مثلثاتی بعد از تدریس توابع صورت گیـرد تا حس ارتباط بهتـری را در یادگیرنده ایجاد کند و سـبب شـود مثلثات را مبحثی صلب و جدا نپندارد. از منظری دیگر و با توجه به ساعات تدریس اختصاص داده شـده به درس ریاضی پایهٔ دوم دبیرستان، به‌نظر بسیاری از دبیران ریاضی، دسـتیابی به اهداف مورد انتظار مؤلفان تقریباً غیرممکن است.

راهکارهایـی برای مواجهه با بدفهمی‌های مثلثاتی دانش‌آموزان

برای ارتقای درک و فهم دانش‌آموزان، راهکارهای زیر توصیه می‌شوند.

– به پیش‌نیازهای لازم دانشـی دانش‌آموزان و سطح دانش آن‌ها توجه شـود، از جمله شـناخت انواع زاویه‌ها (حاده، منفرجـه، قائمه)، تعریف وتر در مثلث قائم‌الزاویه، رابطهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه و موارد مرتبط دیگر.

– به گفتهٔ جفری[9]، مفهـوم زاویهٔ مرجع[10] در مرحلهٔ سـازماندهی درک کامـل دایـرهٔ واحد، اساسـی اسـت. هم‌چنین، زاویهٔ مرجع نقشی کلیدی در انتقال از مثلثاتِ مبتنی بر مثلث قائم‌الزاویه به مثلثات مبتنی بر دایرهٔ واحد دارد. وی معتقد است که درک زاویهٔ مرجع، دانش‌آموز را قادر می‌سـازد تا توجه خود را بر زوایای ربع اول متمرکز کنـد، زیرا همهٔ زاویه‌های دیگر در اغلب روش‌ها، به زاویهٔ ربع اول مربوط می‌شـوند. علاوه بـر این، اندازهٔ یک زاویه مثبت یا منفی اسـت، و صرف‌نظر از بزرگی آن، یک زاویهٔ متناظـر در ربع اول وجود دارد که ویژگی‌های آن، مطابق با زاویهٔ داده شده است. وقتی که دانش‌آموز از زاویهٔ مرجع به درسـتی اسـتفاده کند، می‌تواند مطالعهٔ همهٔ زاویه‌ها، مختصات و نسبت‌های مثلثاتی را به مجموعهٔ کوچک‌تری در ربع اول تبدیل نماید.

در کتاب ریاضی دوم دبیرستان، برای معرفی زاویه‌ها و اندازهٔ آن‌ها در صفحهٔ ۱۲۱، ابتدا راجع به «دوران کامل خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت به اندازهٔ ۳۶۰ درجه باشد...» صحبت شده است. به‌طور شهودی، دانش‌آموزان می‌دانند که «اندازه»، «جهت» ندارد و طبق قرارداد، برای آن «جهـت» در نظر گرفته می‌شـود. اما قبل از آنکه این فعالیـت، فرصت کافی برای پرورش این شـهود را ایجاد کند، با شتاب زیاد، وارد مباحث متعدد مربوط به زاویه‌ها و اندازهٔ آن‌ها شده است.

– بلکت و تال (۱۹۹۱) استفاده از تکنولوژی را یکی از قوی‌ترین اصول آموزش می‌دانند و معتقدند با استفاده از نرم‌افزارهای کامپیوتری، دانش‌آموزان با شکل‌های متنوع و مختلف هندسـی دست‌ورزی می‌کنند و خود، به روابط عددی و مثلثاتی دسـت پیدا می‌کنند. در همین راسـتا، تحقیقات بلکت و تال (۱۹۹۱) در تأیید تأثیر مثبت استفاده از تکنولوژی در تدریس مثلثات اسـت. ماشین‌حساب، به معلم اجازه می‌دهد که محاسـبات یکنواخت و تکراری را در آموزش مفاهیم و حل مسئله‌های مثلثاتی حذف کند و وقت بیشتری را به شکل‌گیری مفاهیم اختصاص بدهد.

پی‌نوشت‌ها

1. Hülya Gür
2. Kendal
3. Stacey
4. Kieran
5. Bressoud
6. Us
7. Lansdell
8. Brown
9. Jeffrey
10. Reference Angle

منابع

۱. شـهریاری، پرویز. (۱۳۷۹). سرگذشـت ریاضیـات. تهران. انتشارات مهاجر، چاپ اول.

۲. ربانی‌فـر، علی‌اکبـر. (۱۳۸۶). مشـکلات و بدفهمی‌هـای دانش‌آمـوزان در رابطـه بـا مثلثات. پایان‌نامه منتشـر نشـده کارشناسـی ارشـد آموزش ریاضی، دانشـکده علـوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی. تهران، ایران.

3. Bressoud, D. M. (2010). **Historical Reflection on Teaching Trigonometry**. Mathemaics Teacher, 104(2), 106-112.

4. Brown, A. S. (200). **The trigonometric connection: Students' understanding of sine and cosine**. Proceeding of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1, p. 228. Prague: PME30.

5. Blackett. N. & Tall, D. (1991). **Gender and the versatile learning of trigonometry using computer software**. Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education XV, Assisi, Italy, (1991), vol 1, pp. 144-151.

6. Gür, H. (2009). **Trigonometry Learning**. New Horizons in Education-The Journal of Education.

7. Kendel, M. & Stacey, K. (1996). **Trigonometry: Comparing Ratio and Unit Circle Methods. (?)**

8. Moore, K.C. (2010). **The Role of Quantitative Reasoning in Precalculus Students Learning Central Concepts of Trigonometry**. Unpublished Doctoral Dissertation. Arizona State University.

9. Moore, K.C. (2012). **Coherence, Quantitative Reasoning, and the Trigonometry of Students**. R. Mayes & L. L. Hatfield (Eds).; Quantitative Reasoning and Mathematical Modeling: A Driver for STEM Integrated Education and Teaching in Context, (pp. 75-92). Laramie, WY: University of Wyoming.

10. National Council of Teachers of Mathematics. (2000). **Principles and standards for scholl mathematics**. Boston, MA. The Author.

11. Weber, K. (2008). **Teaching Trigonometric Functions: Lessons Learned from Research**. Connecting Research to Teaching. The National Council of Teachers of Mathematicst. Vol. 102, No 2, 144-150.

12. Weber, K. (2005). **Students' Understanding of Trigonometric Functions**. Mathematics Education Research Journal. Vol 17, No, 3, 91-112.